

نظریه اطلاعات کوانتومی - بخش دوم

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۵ اردیبهشت ۱۴۰۴

۱ مقدمه

در درس گذشته گفتیم که آنتروپی فون نویمان^۱ از چهار جنبه مختلف نقش کلیدی در نظریه اطلاعات کوانتومی دارد. این جنبه ها این ها هستند:

- یک - در تعیین میزانی که می توان اطلاعات کوانتومی را فشرده کرد،
- دو- در تعیین اندازه درهمتنیدگی حالت های کوانتومی،
- سه - در تعریف رابطه جدیدی برای اصل عدم قطعیت،
- چهار- و در تعیین ظرفیت یک کانال کوانتومی .

در درس گذشته ما به معرفی آنتروپی فون نویمان و کشف خواص ریاضی آن پرداختیم. حالا وقت آن رسیده است که به معرفی نقش های بالا پردازیم و سعی کنیم تا حد امکان آنها را بفهمیم. این نقش ها را در بخش های جداگانه یک به یک بررسی می کنیم. در این درس به بررسی نقش های سه گانه یک، دو و سه می پردازیم. در درس آینده به بررسی نقش چهارم یعنی تعریف ظرفیت کانال های کوانتومی می پردازیم.

^۱ von Neumann Entropy

۲ فشرده کردن اطلاعات کوانتومی: حالت های خالص

فرض کنید که در یک پروژه تکنولوژی کوانتومی از آلیس می خواهند که رشته هایی به طول M به صورت

$$|\Phi\rangle = |\phi_{i_1}\rangle \otimes |\phi_{i_2}\rangle \otimes |\phi_{i_3}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_{i_M}\rangle, \quad (1)$$

تشکیل شده از کیوبیت های دوبعدی، را در یک حافظه کوانتومی تشکیل شده از یون ها یا اسپین ها یا نقاط کوانتومی ذخیره کند یا این که آنها را به صورت فوتون به جایی ارسال کند. این کیوبیت ها همگی از آنزامل

$$X_q = \{|\phi_i\rangle, p_i, i = 1 \dots n\}$$

انتخاب شده اند. از خود سوال می کنیم که حافظه سخت افزاری ای که آلیس برای ذخیره این رشته ها به آن احتیاج دارد شامل چند کیوبیت فیزیکی (یون، اسپین، ...) است. در نگاه اول به نظر می رسد که آلیس می بایست از M تا کیوبیت فیزیکی استفاده کند. البته هر بار که آلیس حافظه را خالی می کند می تواند برای ذخیره کردن رشته بعدی دوباره از همان کیوبیت ها استفاده کند. البته تهیه کیوبیت های فیزیکی معمولاً بسیار دشوار است. خیلی از آزمایشگاه ها ممکن است نتوانند M تا کیوبیت را تهیه کنند. بنابراین آلیس به فکر می افتد که آیا امکان دارد بدون اینکه خطای زیادی مرتکب شود در تعداد کیوبیت های فیزیکی صرفه جویی کند؟

پاسخ این سوال یکی از نتایج مهم نظریه اطلاعات کوانتومی است و جالب است که این پاسخ مشابهت زیادی با قضیه اول شانون دارد. پاسخ این است که می توان رشته های M تایی از حالت ها را در حد M های بسیار بزرگ تنها با استفاده از $MS(\rho)$ کیوبیت فیزیکی ذخیره کرد که در آن

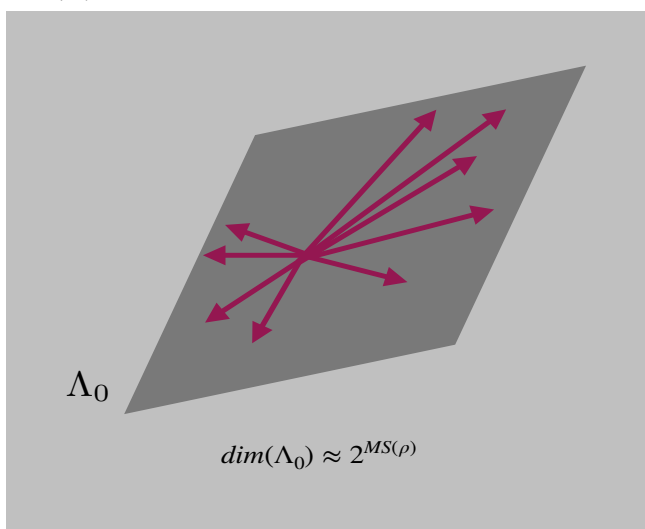
$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|, \quad (2)$$

حالت آمیخته ای است که از آنزامل X_q درست شده است. از آنجا که برای کیوبیت ها $0 \leq S(\rho) \leq 1$ است می بینیم که واقعا می توان این رشته ها را با استفاده از تعداد کمتری کیوبیت فیزیکی ذخیره کرد. اگر رشته هایی اولیه از کیودیت (حالت های با بعد d) درست شده باشند، آنگاه بازهم برای ذخیره آنها احتیاج به $MS(\rho)$ کیوبیت فیزیکی داریم و از آنجا که $0 \leq S(\rho) \leq \log_2 d$ است، بازهم می بینیم که در تعداد کیوبیت های فیزیکی صرفه جویی کرده ایم. آنچه که گفتیم نتیجه اصلی فشرده سازی حالت های خالص است که فشرده سازی شوماخر^۲ نامیده می شود.

Schumacher^۲

ایده‌ی اصلی فشرده سازی در حالت کوانتومی شباهت زیادی به فشرده سازی کلاسیک دارد. در حالت کلاسیک سعی می‌کنیم که تنها رشته‌های نمونه 3 را کد کنیم. در حالت کوانتومی می‌بینیم که منبع کوانتومی رشته‌هایی از حالت‌ها را که تولید می‌کند تمام فضای هیلبرت را پر نکرده‌اند بلکه یک زیرفضایی با بعد کمتر را پر کرده‌اند که به آن زیرفضای نمونه 4 می‌گوییم، شکل (۱). همین ویژگی باعث می‌شود که بتوان از کیوبیت‌های کمتری برای ذخیره کردن یا ارسال این رشته‌ها استفاده کرد و به اصطلاح اطلاعات کوانتومی حالت‌های خالص را فشرده کرد.

$$\dim(V) = d^M = 2^{M \log_2 d}$$



شکل ۱: رشته حالت‌های خالص ضربی که آلایس در اختیار دارد تمام فضای هیلبرت را پر نمی‌کنند بلکه تقریباً در یک زیرفضایی با بعد کمتر قرار دارند. هر چه که طول رشته‌ها بیشتر باشد، این تقریب دقیق‌تر و دقیق‌تر می‌شود. همین ویژگی باعث می‌شود که بتوانیم اطلاعات کوانتومی را فشرده کنیم.

۱.۲ یک تلاش اولیه برای فشرده سازی حالت‌های کوانتومی

برای اینکه خود را برای اثبات نهایی و پاسخ کلی آماده کنیم بهتر است نخست به بررسی چند مثال بپردازیم. آلایس می‌خواهد رشته‌های به طول M را در جایی ذخیره کند. اما فقط تعداد K تا کیوبیت فیزیکی دارد. در نگاه اول بهترین کاری که به نظر می‌رسد این است که آلایس هر رشته

^۳ Typical Strings
^۴ Typical Subspace

M تایی مثل

$$|\Phi_{I_M}\rangle \equiv |\Phi_{i_1, \dots, i_M}\rangle = |\phi_{i_1}\rangle |\phi_{i_2}\rangle \cdots |\phi_{i_M}\rangle$$

که از این آنزامل انتخاب می کند، به یک رشته K تایی

$$|\Phi_{I_K}\rangle \equiv |\Phi_{i_1, \dots, i_K}\rangle = |\phi_{i_1}\rangle |\phi_{i_2}\rangle \cdots |\phi_{i_K}\rangle$$

قطع کند و فقط همین رشته را ذخیره کند. هر وقت که لازم بود می تواند یک رشته $M - K$ تایی به این رشته الصاق کند به نحوی که تشابه حالت دریافتی با حالت فرستاده شده به مقدار بیشینه خود برسد. فرض کنید که در پایان ذخیره سازی آلیس یک رشته $M - K$ تایی $|\lambda\rangle$ را به انتهای رشته دریافتی ضبط شده خود اضافه کند. می خواهیم حالت $|\lambda\rangle$ را چنان تعیین کنیم که تشابه حالت نهایی با حالت اولیه به حداکثر مقدار ممکن برسد. می دانیم که تشابه هر حالت نهایی با حالت اولیه برابر خواهد بود با:

$$F(i_1, \dots, i_M) := |\langle \Phi_{i_1, \dots, i_M} | \Phi_{i_1, \dots, i_K} \rangle \otimes |\lambda\rangle|^2 = |\langle \Phi_{i_{K+1}, i_{K+2}, \dots, i_M} | \lambda \rangle|^2 \quad (۳)$$

به طور متوسط تشابه حالت هایی که آلیس می فرستد با حالت هایی که باب دریافت می کند برابر است با:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_M} P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_M} F(i_1, \dots, i_M) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_M} P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_M} |\langle \Phi_{i_{K+1}, i_{K+2}, \dots, i_M} | \lambda \rangle|^2 \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_M} P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_M} |\langle \phi_{i_{K+1}} | \phi_{i_{K+2}} \rangle, \dots, \langle \phi_{i_M} | \lambda \rangle|^2 \\ &= \langle \lambda | \rho^{\otimes (M-K)} | \lambda \rangle \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن ρ ماتریس چگالی ای است که توسط آنزامل در دست آلیس تعریف می شود، یعنی

$$\rho = \sum_i P_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|. \quad (۵)$$

البته همواره فرض بر این است که آلیس و باب (کسی که نهایتاً حالت ذخیره شده را مورد استفاده قرار می دهد) هر دو این آنزامل را می شناسند. این فرض در مخابرات کلاسیک هم برقرار است. همواره فرستنده و گیرنده ای که از یک کانال استفاده می کنند می دانند که پیام ها از چه نوعی هستند اگر چه اطلاعی از یک پیام خاص ندارند. از این رابطه معلوم می شود که بهترین حالتی که باب می تواند به حالت های دریافتی الصاق کند ویژه حالت $\rho^{\otimes (M-K)}$ است و این حالت چیزی نیست جز حالت زیر:

$$|\lambda\rangle = |\lambda\rangle^{\otimes (M-K)}. \quad (۶)$$

که در آن $|\lambda\rangle$ ویژه حالت ماتریس چگالی ρ با بزرگترین ویژه مقدار است. به این ترتیب بیشینه تشابهی که از این نوع فشرده سازی بدست می آید برابر است با:

$$\bar{F}_{max} = \lambda^{M-K}, \quad (7)$$

که در آن λ بزرگترین ویژه مقدار ماتریس چگالی ρ است. به این ترتیب معلوم است که هر چقدر K از M کمتر باشد، مقدار مشابَهت میانگین پایین تر می آید. اگر λ یک باشد، تشابه میانگین یک خواهد بود و این نتیجه مورد انتظار هم هست چرا که به معنای این است که آنزامل تنها از یک نوع حالت خالص تشکیل شده. هر چه که این ویژه مقدار به یک نزدیک تر باشد تشابه متوسط نیز بزرگ تر خواهد بود. مثال زیر نمونه ای از مقدار خطای ایجاد شده در اثر این فشرده سازی را بدست می دهد.

■ مثال: فرض کنید که آلیس آنزاملی از حالت های خالص به شکل زیر دارد

$$\mathcal{E} = \{|x\rangle, |z\rangle\}, \quad (8)$$

که در آن $|x\rangle$ و $|z\rangle$ ویژه حالت های مثبت اسپین در راستاهای x و z هستند و هرکدام از این حالت ها نیز با احتمال $1/2$ در این آنزامل وارد شده اند. شباهت متوسط را وقتی که آلیس به جای رشته ۳ تایی یک رشته دوتایی می فرستد و باب به طریقی که گفته شد، حالت را بازسازی می کند بدست آورید.

■ حل: ماتریس چگالی یک کیوبیت برابر است با

$$\rho = \frac{1}{2}(|x\rangle\langle x| + |z\rangle\langle z|) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

ویژه مقدارهای این ماتریس چگالی برابر است با:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \equiv \cos^2 \frac{\pi}{8} = 0.853, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \equiv \sin^2 \frac{\pi}{8} = 0.147. \quad (10)$$

ویژه بردارهای مربوط به این دو ویژه مقدار عبارتند از:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{8} \\ \sin \frac{\pi}{8} \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{8} \\ \cos \frac{\pi}{8} \end{pmatrix} \quad (11)$$

بنابراین بیشینه تشابه با این روش برابر است با 0.853.

■ **تمرین.** با نوشتن ماتریس چگالی بر حسب ماتریس های پاوولی و با استفاده از تصور هندسی در کره بلوخ ویژه مقادارها و ویژه بردارهای فوق را بدست آورید.

حال نشان می دهیم که در همین مثال، یعنی وقتی که آلیس تنها دو کوبیت در اختیار دارد ولی می خواهد رشته های سه کیوبیتی را ذخیره کند، راه حل بهتری در اختیار خواهد داشت. این راه حل بهتر که بیان می کنیم ایده اصلی فشرده سازی کوانتومی شوماخر را در بر دارد. پس از بررسی این مثال و درک ایده ی اصلی به راحتی می توانیم به حالت کلی بپردازیم.

■ **تمرین:** فرض کنید که آلیس یکی از دو حالت های $|z\rangle$ یا $|x\rangle$ را در دست دارد و می خواهد آنها را برای باب بفرستد. در این جا منظور از $|z\rangle$ و $|x\rangle$ به ترتیب ویژه حالت های مثبت عملگرهای پاوولی در راستای z و x هستند.

الف: اگر آلیس این حالت ها را با احتمال های مساوی برای باب بفرستد و در بین راه این حالت ها گم شوند، بهترین حالت خالصی که باب می تواند به عنوان جایگزین به کار ببرد چه حالتی است. فرض کنید که باب قرار بوده که حالت دریافت شده را برای شخص ثالثی بفرستد و می خواهد به جای حالت گم شده حالتی بفرستد که کمترین اختلال را در روند محاسبه یا هر کاربرد دیگری ایجاد کند.
ب: اگر آلیس این حالت ها را با احتمالات زیر بفرستد پاسخ سوال قسمت الف چه خواهد بود؟

$$P(z) = 3/4, \quad P(x) = 1/4$$

■ **تمرین:** فرض کنید که آلیس یکی از دو حالت های $|z, z\rangle$ یا $|x, x\rangle$ را در دست دارد و هرکدام از آن ها را با احتمال مساوی برای باب می فرستد. اگر در بین راه این حالت ها گم شوند، بهترین حالت خالصی که باب می تواند جایگزین حالت ارسال شده بکند چه حالتی است.

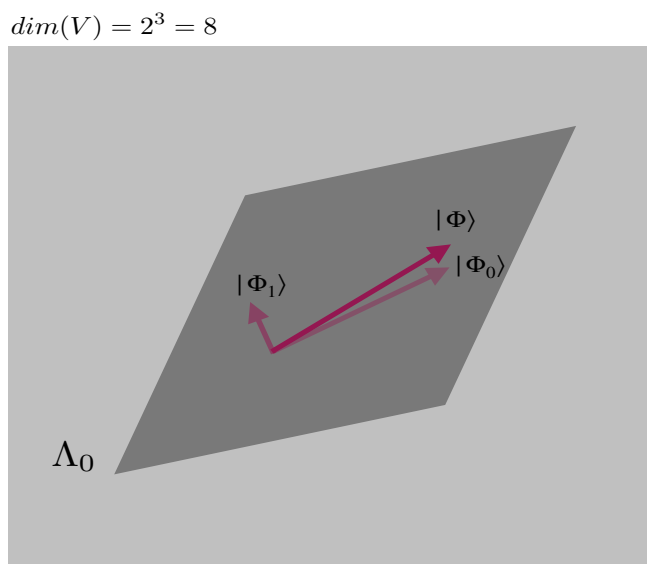
۲.۲ فشرده سازی شوماخر، ایده اصلی با یک مثال ساده

در مثال بالا آیا راه بهتری هم برای فشرده سازی هست؟ پاسخ این سوال چنانچه خواهیم دید، مثبت است. آلیس نخست یک اندازه گیری روی حالت دریافتی اش انجام می دهد. منطق این اندازه گیری چنین است. اگر روی یک کیوبیت یک اندازه گیری در پایه $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ یعنی پایه ویژه بردارهای ماتریس چگالی انجام دهد، مسلماً حالتی که بدست می آید با احتمال بیشتر روی $|0\rangle$ تصویر می شود تا $|1\rangle$. ولی آلیس رشته های سه تایی دریافت می کند. بنابراین آلیس فضای هیلبرت یک رشته ی سه تایی را به دو زیرفضای محتمل و نامحتمل تقسیم می کند. می دانیم با توجه به آنچه که در بالا به آن اشاره کردیم، زیرفضاهای محتمل (Λ_0) و نامحتمل (Λ_1) را چنین تعریف می کنیم:

$$\Lambda_0 = \text{Span}\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |100\rangle\}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_0^\perp = \text{Span}\{|111\rangle, |110\rangle, |101\rangle, |011\rangle\}. \quad (۱۲)$$

آلیس می بایست هر رشته ورودی را اندازه گیری کند و ببیند که آیا این رشته یک رشته محتمل است یا نا محتمل. به عبارت دیگر آلیس می بایست روی هر رشته ورودی که یکی از هشت حالت ورودی $\{|xxx\rangle, |xxz\rangle, \dots, |zzz\rangle\}$ است یک اندازه گیری تصویری با عملگرهای تصویری

$$\begin{aligned} P_0 &= |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 100|, \\ P_1 &= |111\rangle\langle 111| + |110\rangle\langle 110| + |101\rangle\langle 101| + |011\rangle\langle 011|, \end{aligned} \quad (13)$$



شکل ۲: آلیس نخست با یک اندازه گیری حالت های سه تایی را به روی زیرفضای محتمل تصویر می کند. این کار با احتمال زیاد اتفاق می افتد. با احتمال خیلی کمی نیز حالت ها به زیرفضای نامحتمل تصویر می شوند.

به طور متوسط احتمال اینکه یک حالت سه تایی آلیس روی زیرفضای محتمل بیفتد چقدر است؟ این احتمال برابر است با:

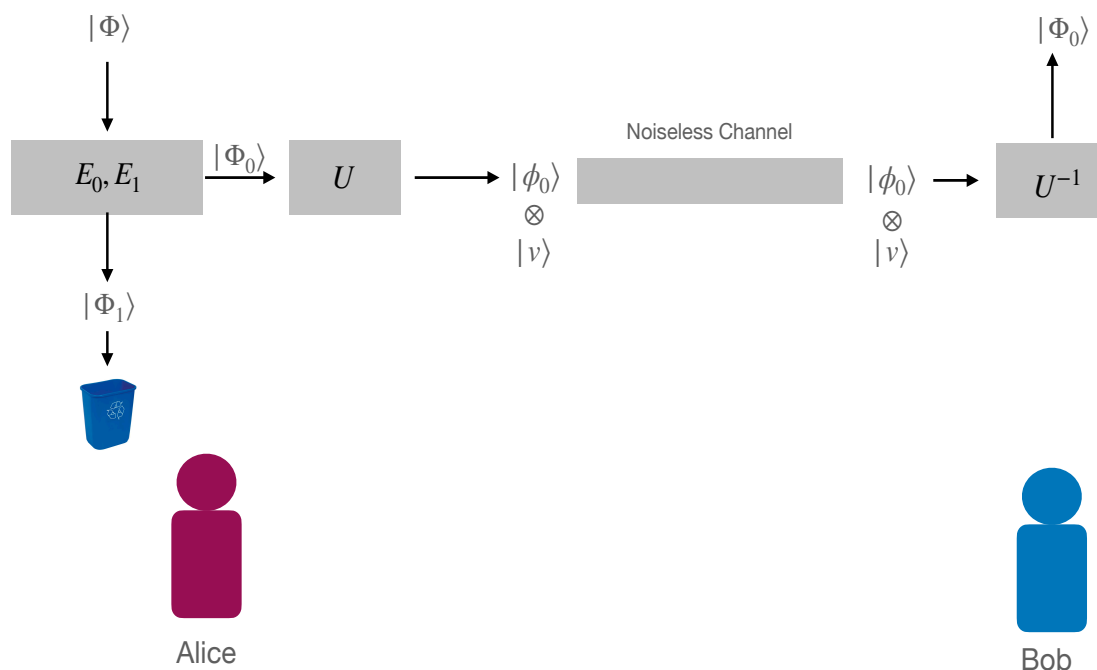
$$\text{Tr}(E_0 \rho^{\otimes 3}) = \lambda_0^3 + 3\lambda_0^2 \lambda_1 = 0.9419 \quad (14)$$

و به طور متوسط احتمال اینکه یک حالت سه تایی روی این زیرفضا نیفتد برابر است با: 0.0581. طبیعی است که با احتمال زیاد یک حالت به زیرفضای محتمل تصویر می شود و با احتمال خیلی کمی به زیرفضای نامحتمل. حالت تصویر شده در یک زیرفضای دو بعدی یعنی Λ_0 از کل

فضا قرار دارد. این حالت برابر است با:

$$|\Phi_0\rangle = \frac{E_0|\Phi\rangle}{\sqrt{\langle\Phi|E_0|\Phi\rangle}}. \quad (15)$$

آلیس با یک عملگر یکانی مثل U می تواند این زیرفضا و در نتیجه تمام بردارهای تصویر شده را به یک زیرفضای دوبعدی مثل V_0 بچرخاند به نحوی که این زیرفضای دو بعدی V_0 کیوبیت سوم اش یک کیوبیت مشخص و ثابت مثل $|v\rangle$ باشد. بنابراین هر حالتی مثل $|\Phi\rangle$ پس از تصویر کردن و پس از عمل یکانی به صورت $|\phi_0\rangle|v\rangle$ در می آید. آلیس کافی است که حالت دو کیوبیتی $|\phi_0\rangle$ را به باب بفرستد. در مقصد باب با افزودن حالت شناخته شده $|v\rangle$ به حالت $|\phi_0\rangle$ و اعمال عملگر U^{-1} حالت $|\Phi_0\rangle$ را بازیابی می کند. این مراحل در شکل (۳) نشان داده شده اند.



شکل ۳: مراحل فشرده سازی شوماخر. در مثال ساده ای که ذکر کردیم، $|\Phi\rangle$ یک حالت سه کیوبیتی و $|\phi_0\rangle$ یک حالت دو کیوبیتی است. در حالت کلی $|\Phi\rangle$ یک حالت $M \log_2 d$ کیوبیتی و $|\phi_0\rangle$ یک حالت $MS(\rho)$ کیوبیتی است.

این حالت یک حالت سه کیوبیتی در فضای اولیه است که البته دقیقاً همان حالت اولیه نیست ولی با آن شباهت زیادی دارد. البته در بعضی

مواقع هم آلیس البته با احتمال کمی حالت اش را به زیرفضای نامحتمل تصویر می کند که در این صورت چیزی به باب نمی فرستد. در این مواقع باب می تواند خودش یک حالت سه کیوبیتی را بجای حالتی که آلیس برایش فرستاده تهیه کند و البته بهترین نامزد برای چنین حالتی حالت سه کیوبیتی $|\lambda_0\rangle^{\otimes 3}$ است. به این ترتیب یک حالت مثل $|\Phi\rangle$ با احتمال $\langle\Phi|E_0|\Phi\rangle$ به صورت $|\Phi_0\rangle$ به دست باب می رسد یا با احتمال $1 - \langle\Phi|E_0|\Phi\rangle$ باب حالتی مثل $|\lambda_0\rangle^{\otimes 3}$ جایگزین می کند. به این ترتیب و با توجه به شکل حالت $|\Phi_0\rangle$ از معادله (۱۵) به صورت زیر حالتی که به دست باب می رسد برابر است با:

$$\rho^B = E_0|\Phi\rangle\langle\Phi|E_0 + (1 - \langle\Phi|E_0|\Phi\rangle)(|\lambda_0\rangle\langle\lambda_0|)^{\otimes 3} \quad (16)$$

شبهات متوسط حالت های دریافتی باب با حالت های ارسالی از آلیس چقدر است؟ این شبهات برابر است با:

$$\bar{F} = \sum_{\Phi} P_{\Phi} \langle\Phi|\rho^B|\Phi\rangle = \sum_{\Phi} P_{\Phi} |\langle\Phi|E_0|\Phi\rangle|^2 + P_{\Phi} (1 - \langle\Phi|E_0|\Phi\rangle) \langle\Phi|(|\lambda_0\rangle\langle\lambda_0|)^{\otimes 3}|\Phi\rangle. \quad (17)$$

در عبارت بالا روی همه حالت های $|\Phi\rangle \in \{|xxx\rangle, |xxz\rangle, \dots, |zzz\rangle\}$ جمع زده می شود. می دانیم که

$$\begin{aligned} \langle\Phi|E_0|\Phi\rangle &= \cos^6 \frac{\pi}{8} + 3 \cos^4 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{15}{16} = 0.9419, \\ \langle\Phi|I - E_0|\Phi\rangle &= \frac{1}{16} = 0.0581, \\ \langle\Phi|000\rangle\langle 000|\Phi\rangle &= \cos^3 \frac{\pi}{8} = 0.6274. \end{aligned} \quad (18)$$

بنابراین بدست می آوریم

$$\bar{F} = 0.9236. \quad (19)$$

بدین ترتیب آلیس توانسته است تنها با ارسال ۲ کیوبیت به مشابهتی به اندازه 0.9236 دست پیدا کند. در مثالی که ذکر کردیم برای سادگی محاسبات، حالت های آنزامل طوری انتخاب شده بودند که همه $|\Phi\rangle$ ها روی تصویر گر E_0 مقدار مساوی داشتند. باید توجه داشته باشیم که در حالت کلی چنین نیست. ولی این سادگی برای محاسبات مشخص و عددی در مورد این مثال خاص مفید بود. در بخش بعد به حالت کلی می پردازیم و نشان خواهیم داد که آلیس واقعاً می تواند با ارسال رشته کیوبیت های طولانی به مشابهت های به اندازه کافی نزدیک به یک دست پیدا کند. البته بحث خود را به صورت کلی و نه در قالب این مثال خاص دنبال خواهیم کرد.

■ تمرین: فرض کنید که آلیس از همین آنزاملی که تا کنون مطالعه کرده ایم کیوبیت های 5 تایی دریافت کند ولی تنها بتواند رشته های 3 کیوبیتی برای باب بفرستد.

الف: بهترین استراتژی آلیس و باب در این صورت چه خواهد بود. فیدلیته متوسط حالت هایی که به دست باب می رسد با حالت های اولیه ای که آلیس دریافت کرده است چقدر است؟

ب: اگر طول رشته های دریافتی 7 باشد و آلیس تنها بتواند 5 کیوبیت برای باب بفرستد پاسخ سوال الف چه خواهد بود.

۳.۲ فشرده سازی شوماخره: حالت کلی

در این بخش می خواهیم نشان دهیم که فشرده سازی ای بهتر از روش فوق وجود دارد. همانطور که خواهیم دید این روش نیز متکی بر ایده اصلی رشته های نمونه است. بنابراین بسیاری از استدلال های مربوط به این فشرده سازی کوانتومی را می توان با اتکای به همان قضایایی که در حالت کلاسیک داشتیم دقیق و محکم کرد. البته ما این کار را نمی کنیم و فقط سعی می کنیم که ایده اصلی فشرده سازی حالت های کوانتومی را که توسط بنجامین شوماخره^۵ ابداع شده است را توضیح دهیم. فرض می کنیم که آلیس یک آنزامل از حالت های خالص از کیوبیت ها به صورت $\{|\phi_i\rangle, p_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ در اختیار دارد.

■ در واقع می توانستیم فرض کنیم که آنزامل آلیس همان آنزامل ساده دوتایی $\{|x\rangle, |z\rangle\}$ است و استدلال را پیش ببریم. در اینجا آنزامل را کلی تر گرفته ایم. هم چنین می توانستیم فرض کنیم که به جای حالت های دوبعدی کیوبیت حالت های d بعدی کیودیت داشته باشیم. اینها هیچکدام تغییر اساسی در استدلال ایجاد نخواهند کرد.

ماتریس چگالی یک حالت برابر است با

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|. \quad (20)$$

بعد ماتریس ρ برابر است با 2. بازهم مسئله این است که آلیس می خواهد رشته ای به طول n از حالت های فوق مثل

$$|\Phi_{x_i}\rangle := |\phi_{x_1}\rangle |\phi_{x_2}\rangle |\phi_{x_3}\rangle \cdots |\phi_{x_M}\rangle, \quad x_i \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (21)$$

را برای باب بفرستد. اگر آلیس n کانال تک کیوبیتی در اختیار داشته باشد می تواند این حالت ها را با تشابه یک به باب بفرستد. ولی به دلیل محدود بودن امکانات آزمایشی اش (گران بودن کانال های کوانتومی یا گران بودن حافظه های کوانتومی) می خواهد به بهترین نحو ممکن این

^۵ Benjamin Schumacher

حالت ها را فشرده کند طوری که نهایتاً هر حالتی که به دست باب می رسد (پس از بازسازی آن توسط باب) بیشترین شباهت را با حالت اولیه آلیس داشته باشد. دقت می کنیم که رشته های فوق از هم تمیز ناپذیرند. هر چنین رشته ای با احتمال $P_x := p_{x_1} p_{x_2} \cdots p_{x_M}$ ارسال می شود و ماتریس چگالی این رشته ها برابر است با

$$\rho^{(n)} = \sum_x P_x |\Phi_x\rangle \langle \Phi_x| = \rho^{\otimes M}. \quad (22)$$

برای این کار آلیس به ترتیب زیر عمل می کند و تمام این اعمال چیزی نیستند جز تعمیم سراسر آنچه که در مثال بخش قبلی دیدیم. ماتریس چگالی ρ دارای دو ویژه مقدار $|0\rangle$ و $|1\rangle$ است.

$$\rho|0\rangle = \lambda_0|0\rangle, \quad \rho|1\rangle = \lambda_1|1\rangle. \quad (23)$$

اگر ماتریس چگالی ρ را در پایه های خودش اندازه گیری کنیم با احتمال $\lambda_0 = \langle 0|\rho|0\rangle$ مقدار 0 و با احتمال $\lambda_1 = \langle 1|\rho|1\rangle$ مقدار 1 بدست خواهد آمد. هم چنین ویژه مقدارها و ویژه بردارهای $\rho^{(n)}$ عبارتند از:

$$\rho^{(M)} |s_1 s_2 \cdots s_n\rangle = \lambda_{s_1} \lambda_{s_2} \cdots \lambda_{s_M} |s_1 s_2 \cdots s_M\rangle, \quad s_i \in \{0, 1\}. \quad (24)$$

اگر $\rho^{(n)}$ را در پایه های خودش اندازه گیری کنیم احتمال بدست آوردن رشته ای $|s_1 s_2 \cdots s_M\rangle$ برابر است با $\lambda_{s_1} \lambda_{s_2} \cdots \lambda_{s_M}$. در چنین رشته ای متوسط تعداد 0 ها را با M_0 و تعداد 1 ها را با M_1 نشان می دهیم. واضح است که متوسط این مقادیر برابر است با $\overline{M_0} = M\lambda_0$ و $\overline{M_1} = M\lambda_1$. بنابراین در تقریب صفرم می توانیم بگوییم که زیرفضای محتمل آن زیرفضایی است که توسط آن دسته از ویژه بردارهای $|s_1 s_2 \cdots s_M\rangle$ جاروب می شود که تعداد 0 ها و 1 هایشان به ترتیب برابرند با $M\lambda_0$ و $M\lambda_1$. یعنی قرار دهیم

$$\Lambda_{typical} := \text{Span}\{|s_1 s_2 \cdots s_M\rangle, \quad M_0 = M\lambda_0, \quad M_1 = M\lambda_1\}. \quad (25)$$

تعداد چنین بردارهایی یعنی بعد این زیرفضای محتمل چقدر است؟ پاسخ آن برابر است با

$$\text{Dim}(\Lambda_{typical}) = \binom{M}{M\lambda_0} = 2^{MS(\rho)}, \quad (26)$$

که در آن از تقریب استرلینگ و رابطه ی

$$S(\rho) = -\lambda_0 \log_2 \lambda_0 - \lambda_1 \log_2 \lambda_1, \quad (27)$$

استفاده کرده‌ایم. اگر یک بردار متعلق به زیرفضای نمونه یعنی $\Lambda_{typical}$ را در نظر بگیریم، ویژه مقدار آن برای عملگر چگالی چقدر است؟ پاسخ برابر است با

$$\rho|v\rangle = \lambda_0^{M\lambda_0} \lambda_1^{M\lambda_1} |v\rangle = 2^{M\lambda_0 \log \lambda_0 + M\lambda_1 \log \lambda_1} |v\rangle = 2^{-MS(\rho)} |v\rangle. \quad (28)$$

بنابراین می‌توانیم زیر فضای نمونه را به این صورت تعریف کنیم که زیرفضایی است که توسط تمام بردارهای با ویژه مقدار $2^{-MS(\rho)}$ جاروب می‌شود. عملگر تصویر روی فضای $\Lambda_{typical}$ را با E نشان می‌دهیم، یعنی

$$E := \sum_{v \in \Lambda_{typical}} |v\rangle\langle v|. \quad (29)$$

با چنین تعریفی احتمال این که اندازه‌گیری یک حالت آن را به زیر فضای نمونه یعنی $\Lambda_{typical}$ تصویر کند برابر خواهد بود با

$$P_{typical} = tr(\rho E) = \sum_{i \in typical} \mu_i = 2^{MS(\rho)} \times 2^{-MS(\rho)} = 1, \quad (30)$$

که به این معناست که هر نوع اندازه‌گیری با احتمال یک حتماً حالت یک رشته را به زیر فضای نمونه تصویر خواهد کرد. البته این نتیجه در حد M های بسیار بزرگ درست است و هم چندی ناشی از تعریف خیلی محدود ما از زیر فضای نمونه است. ولی به همان دلیل و ترتیبی که در حالت کلاسیک رشته‌های نمونه را با کمی آسان‌گیری تعریف کردیم، در این جا هم می‌توانیم تعریف زیر فضای نمونه را با کمی آسان‌گیری تعریف کنیم به این ترتیب که:

$$\Lambda_{typical} := Span\{|v\rangle \mid 2^{-M(S(\rho)+\delta)} < \lambda(v) < 2^{-M(S(\rho)-\delta)}\} \quad (31)$$

با این تعریف رابطه‌ی ۳۰ به صورت زیر تعدیل می‌شود

$$1 - \epsilon \leq tr(\rho E) \leq 1. \quad (32)$$

با بزرگ‌تر گرفتن M می‌توانیم مقدار ϵ را هرچقدر که می‌خواهیم کوچک اختیار کنیم. (در این قسمت از درس ما از جاده استدلال خیلی دقیق کمی دور افتاده‌ایم ولی مطالبی را که می‌گوییم، خواننده‌ی علاقمند می‌تواند به طور دقیق اثبات کند. برای این کار کافی است که به اثبات نامساوی‌هایی که در درس نظریه اطلاعات کلاسیک بدست آوردیم رجوع کند.)

حال مطابق با مثالی که در قسمت قبلی دیدیم آلیس برای کد کردن یک رشته دلخواه مثل $|\Phi_x\rangle$ به ترتیب زیر عمل می کند. نخست وی یک اندازه گیری با تصویرگرهای $\{E, 1 - E\}$ انجام می دهد. وقتی که وی نتیجه E را بدست می آورد، حالت وی با احتمال $\langle \Phi_x | E | \Phi_x \rangle$ روی زیر فضای نمونه تصویر می شود. بعد این زیر فضا برابر است با $2^{MS(\rho)}$. سپس وی می تواند از یک عملگر یکانی مثل U استفاده کند که حالت های این فضا را به طرز مناسبی بچرخاند به نحوی که :

$$U : |\Phi_x\rangle \longrightarrow |\phi_x\rangle \otimes |v\rangle^{\otimes M(1-S(\rho))}, \quad \text{if } |\Phi_x\rangle \in \Lambda_{\text{typical}}. \quad (33)$$

این که حالت $|v\rangle$ چیست اهمیتی ندارد، زیرا آلیس آن را مخابره نمی کند. دقت کنید که $|\phi_x\rangle$ یک حالت در فضای $MS(\rho)$ کیوبیتی است. پس از این کار آلیس تنها حالت $|\phi_x\rangle$ را به باب می فرستد. سپس باب حالت $|v\rangle^{\otimes N(1-S(\rho))}$ را به حالت دریافت شده اضافه کرده و عملگر U^{-1} را به حالت ایجاد شده اعمال می کند تا حالت $|\Phi_x\rangle$ را بدست بیاورد. اما وقتی که آلیس نتیجه $1 - E$ بدست می آورد، آلیس و باب می توانند هر کار دیگری انجام دهند. در این مورد که با احتمال خیلی کم $tr(\rho^{\otimes M}(1 - E))$ رخ می دهد، فرض کنید که نتیجه روش آلیس و باب این است که یک حالت دلخواه مثل $|\chi_x\rangle$ به دست باب می رسد. بنابراین نتیجه کلی این است که

$$\rho_x^B = E|\Phi_x\rangle\langle\Phi_x|E + \langle\Phi_x|I - E|\Phi_x\rangle|\chi_x\rangle\langle\chi_x|. \quad (34)$$

■ تمرین: درستی رابطه بالا را ثابت کنید.

حال تشابه متوسط را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_x P_x \langle \Phi_x | \rho_x^{Bob} | \Phi_x \rangle \\ &= \sum_x P_x \langle \Phi_x | E | \Phi_x \rangle \langle \Phi_x | E | \Phi_x \rangle + \sum_x P_x \langle \Phi_x | 1 - E | \Phi_x \rangle \langle \Phi_x | \chi_x \rangle \langle \chi_x | \Phi_x \rangle \\ &\geq \sum_x P_x \|E|\Phi_x\rangle\|^4. \end{aligned} \quad (35)$$

در سطر دوم از رابطه فوق از این موضوع استفاده کرده ایم که جمله دوم عبارت مثبت است و در سطر آخر هم از این استفاده کرده ایم که E یک عملگر تصویری است و بنابراین می توان E را با E^2 جایگزین کرد. اما با استفاده از نامساوی $(x - 1)^2 \geq 0$ یا $x^2 \geq 2x - 1$ نتیجه می گیریم که

$$\bar{F} \geq \sum_x P_x (2\|E|\Phi_x\rangle\|^2 - 1) = \sum_x 2P_x \langle \Phi_x | E | \Phi_x \rangle - 1 = 2tr(E\rho) - 1 \geq 2(1 - \epsilon) - 1 = 1 - 2\epsilon. \quad (36)$$

به این ترتیب نشان داده‌ایم که با ارسال تنها $MS(\rho)$ کیوبیت می‌توان اطلاعات موجود در رشته های M کیوبیتی از آنرا $\rho^{\otimes M}$ را با مشابهت هرچقدر نزدیک به 1 ارسال کرد. این نتیجه تعمیم قضیه اول شانون به حالت کوانتومی است. به عبارت بهتر این قضیه می‌گوید که اطلاعات موجود در رشته های M کیوبیتی که از این آنرا ρ یا الفبای کوانتومی ساخته می‌شوند، به اندازه $MS(\rho)$ کیوبیت است. این نتیجه برای آنرا M از حالت های آمیخته مثل

$$X_q := \{|\psi_i\rangle, p_i\}$$

نیز صحیح است، یعنی رشته ای به طول M از این حالت ها مثل

$$\rho_x = \rho_{x_1} \otimes \rho_{x_2} \cdots \otimes \rho_{x_M} \quad (37)$$

را مثل گذشته می‌توان با اندازه گیری $\{E_0, E_1\}$ روی زیرفضای نمونه تصویر کرد و سپس به همان شکلی که در مورد حالت های خالص گفتیم دوباره احیا کرد. یعنی این رشته را نیز می‌توان در در $MS(\rho)$ کیوبیت فشرده کرد که در آن $\rho = \sum_u p_u \rho_u$ حالت متوسط همه حالت های آنرا M است. البته باید تاکید کنیم که این کمیت میزان فشرده سازی این حالت ها را به دست می‌دهد. اینکه آیا این رشته های حالت های آمیخته (37) حاوی چه مقدار اطلاعات در مورد رشته های کلاسیک (x_1, x_2, \dots, x_M) هستند، موضوع دیگری است که اکنون به آن می‌پردازیم.

۳ اطلاعات قابل دستیابی و کمیت هولده و

با پیشرفت فناوریهای کوانتومی قابل انتظار خواهد بود که از همین کانال های کوانتومی (مثل فیبرنوری یا فوتون ها) برای ارسال اطلاعات کلاسیک استفاده کنیم. دلیل استفاده از کانال های کوانتومی نیز قابلیت آنها برای ارسال اطلاعات در تک فوتون ها و نظایر آن است. بنابراین رشته بیت های کلاسیک در رشته ای از کیوبیت ها کد شده و از طریق کانال کوانتومی به مقصد فرستاده می‌شوند. در بین راه این رشته حالت ها ممکن است دچار خطا شوند و در مقصد قرار است که تشخیص داده شود هدف از ارسال این رشته حالت های کوانتومی چه رشته ای از بیت های کلاسیک بوده است. به طور مشخص تر، فرض کنید که آلیس رشته هایی مثل (x_1, x_2, \dots, x_M) را که هر حرف آن x_i آن با احتمال p_{x_i} تشکیل شده، در رشته هایی از حالت های کوانتومی

$$\rho_x = \sigma_{x_1} \otimes \sigma_{x_2} \otimes \sigma_{x_n}$$

باب با یک $POVM$ مثل مجموعه $\{E_y\}$ اندازه گیری انجام می دهد. هدف باب این است که تشخیص دهد آلیس کدام حالت را برای او فرستاده است. اگر حالت هایی که آلیس می فرستد متعامد باشند، باب می تواند با یک $POVM = \{|\phi_y\rangle\langle\phi_y|\}$ حالت ها را با اطمینان تشخیص دهد. ولی اگر حالت ها متعامد نباشند هیچگاه اطمینان و قطعیت برای باب حاصل نمی شود و وی تنها می تواند با اندازه گیری هوشمندانه میزان اطلاعات خود را افزایش دهد. احتمال اینکه باب نتیجه y را بدست بیاورد مشروط بر اینکه آلیس حالت σ_x را ارسال کرده باشد برابر است با:

$$P(y|x) = \text{tr}(\sigma_x E_y). \quad (38)$$

بنابراین احتمال اینکه آلیس حالت σ_x را ارسال کند و باب نتیجه y را بدست بیاورد، برابر است با

$$p(y, x) = p(y|x)p_x = \text{tr}(\sigma_x E_y)p_x.$$

هم چنین خواهیم داشت

$$p_y = \sum_x p(y, x) = \sum_x p(y|x)p_x = \sum_x \text{tr}(\sigma_x E_y)p_x. \quad (39)$$

هدف باب آن است که با اندازه گیری مناسب میزان اطلاعات متقابل بین متغیر تصادفی X و Y را بیشینه کند، شکل (۴).



شکل ۴: آلیس حالت هایی از آزمایش $\{p_x, \rho_x\}$ را برای باب می فرستد. باب می خواهد با بهترین اندازه گیری آنها را تا حد امکان از هم تشخیص دهد.

سوال این است که با بهترین اندازه گیری هایی که باب انجام می دهد، تا چه حد می تواند نسبت به اطلاعات ارسال شده در این رشته ها اطمینان پیدا کند. آیا می توان گفت که اطلاعات ذخیره شده در این رشته ها با کمیتی مثل $S(\sum_x p_x \rho_x)$ سنجیده می شود؟ برای فهم این موضوع فرض کنید که منبع کوانتومی به شکل زیر باشد $X_q = \{\sigma, p(\sigma) = 1\}$. در این صورت همه رشته های n کیوبیتی ای که توسط این منبع صادر می شوند عین هم هستند و آلیس برای آنکه بگوید که کدام رشته n کیوبیتی مخابره شده است احتیاج به ارسال هیچ کیوبیتی ندارد. به عبارت دیگر اطلاعات موجود در این رشته ها صفر است. اما می دانیم که $S(\rho) = S(\sigma)$ و بسته به نوع حالت σ ، $S(\rho)$ می تواند هر مقداری بین صفر و یک را اختیار کند. پس در مورد حالت های آمیخته پاسخ سوال فوق $S(\rho)$ نیست. آیا می توانیم حدس قابل قبولی برای پاسخ به این سوال ارائه کنیم. برای این کار به دو حالت حدی نگاه می کنیم تا بفهمیم که کمیت مورد نظر چه رفتار حدی ای می بایست داشته باشد. این کمیت را با $\chi(X_q)$ نشان می دهیم. به عنوان دو حالت حدی موارد زیر را نگاه می کنیم:

الف: آنزامل $X_q = \{|\phi_x\rangle, p_x\}$ از حالت های خالص ولی نامتعامل تشکیل شده است. این مورد را در بخش قبلی مطالعه کرده ایم و می دانیم که میزان اطلاعات موجود در آن $S(\rho)$ بر حالت است که در آن $\rho = \sum_x |\phi_x\rangle\langle\phi_x|$. بنابراین می بایست کمیت $\chi(X_q)$ در این حد تبدیل شود به $S(\rho)$.

ب: آنزامل $X_q = \{\sigma_x, p_x\}$ از حالت های ناخالص ولی متعامل تشکیل شده است. در این صورت چون همه ی حالت های σ_x تمیز پذیرند، کوانتومی بودن حالت ها اهمیت ندارد و آلیس می تواند بجای هر حالت σ_x خود رشته ی کلاسیک x را مخابره کند و ما از درس قبل می دانیم که اطلاعات موجود در این آنزامل برابر است با $H(X)$ بیت بر حرف یا حالت که در آن $H(X) = -\sum_i p_i \log p_i$. پس کمیت $\chi(X_q)$ می بایست در این حد میل کند به $H(X)$.

حال سوال این است که آیا چنین کمیتی وجود دارد؟ و آیا به فرض وجود دارای خاصیت های مورد انتظار هست یا نه؟ این کمیت به کمیت هولِه و موسوم است^۶ و به شکل زیر تعریف می شود:

$$\chi(X_q) = S\left(\sum_x p_x \rho_x\right) - \sum_x p_x S(\rho_x). \quad (40)$$

بنابر شرط محدب بودن آنروپی فون نویمان می دانیم که این کمیت نامنفی است. هم چنین واضح است که برای آنزاملی از حالت های خالص این کمیت تبدیل می شود به آنروپی فون نویمان مربوط به آن آنزامل. حال فرض کنید که حالت ها آمیخته ولی بر هم عمود باشند که در این صورت^۶ به خاطر Alexander Holevo که نخستین بار آن را مطرح کرده است.

آنها را با σ_x نشان می دهیم. ز آنجا که σ_x ها برهم عمودند، پس پایه γ آنها در فضاهای عمود برهم قرار گرفته است و بنابراین ماتریس چگالی $\rho = \sum_x p_x \sigma_x$ چنین قیافه‌ای دارد:

$$\rho = \begin{pmatrix} p_1 \tilde{\sigma}_1 & & & \\ & p_2 \tilde{\sigma}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & p_n \tilde{\sigma}_n \end{pmatrix}, \quad (41)$$

که در آن منظور از $\tilde{\sigma}$ تحدید σ به زیر فضای پایه خودش است یعنی به زیر فضای ویژه مقدارهای غیرصفرخودش. بنابراین با قطری کردن ماتریس فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned} S(\rho) &\equiv S\left(\sum_x p_x \sigma_x\right) = -\sum_x \text{tr}(p_x \sigma_x \log(p_x \sigma_x)) \\ &= -\sum_x \text{tr}(p_x \sigma_x \log p_x) - \sum_x \text{tr}(p_x \sigma_x \log \sigma_x) \\ &= -\sum_x p_x \log p_x - \sum_x p_x \text{tr}(\sigma_x \log \sigma_x) = H(X) + \sum_x p_x S(\sigma_x). \end{aligned} \quad (42)$$

بنابراین بدست می آوریم که برای یک آنزامل از حالت های آمیخته‌ی متعامد،

$$\chi(X_q) \equiv S\left(\sum_x p_x \sigma_x\right) - \sum_x p_x S(\sigma_x) = H(X) \quad (43)$$

که همان انتظاری است که داشتیم. در ادامه نشان خواهیم داد که کمیت هول و بیشینه مقدار اطلاعاتی است که باب می تواند با بهترین اندازه گیری ها از این رشته های کوانتومی استخراج کند. در حالت حدی یعنی وقتی که طول رشته ها به سمت بی نهایت میل می کند، کمیت هول و دقیقاً برابر با اطلاعاتی است که باب می تواند به ازای هر حرف از این رشته ها استخراج کند.

فعلاً مطابق با روشی که در درس های گذشته پیش گرفته ایم بیاید نخست به مطالعه خواص ریاضی آن بپردازیم.

Support^۷

۱.۳ ویژگی های کمیت هولِه و

همان طور که گفتیم در این بخش تنها به مطالعه ویژگیهای ریاضی کمیت هولِه و می پردازیم. این ویژگی ها را در چند قضیه بیان می کنیم. هر کدام از قضایا را نیز جداگانه ثابت خواهیم کرد. نخستین ویژگی نشان می دهد که کمیت هولِه و را می توان به عنوان آنتروپی نسبی بین دو حالت خاص در نظر گرفت.

■ **قضیه:** کمیت هولِه و آنتروپی نسبی بین دو حالت خاص است: یعنی

$$\chi(X_q) = S(\rho_{AB} || \rho_A \otimes \rho_B) \quad (۴۴)$$

که در آن

$$\rho_{AB} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_x \quad (۴۵)$$

■ **اثبات:** با توجه به شکل ρ_{AB} در می یابیم که

$$\rho_A = \sum_x p_x |x\rangle\langle x|, \quad \rho_B = \sum_x p_x \rho_x \quad (۴۶)$$

یک محاسبه ساده نشان می دهد که

$$S(\rho_{AB}) = H(X) + \sum_x p_x S(\rho_x), \quad S(\rho_A) = H(X), \quad (۴۷)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} S(\rho_{AB} || \rho_A \otimes \rho_B) &= -S(\rho_{AB}) + S(\rho_A) + S(\rho_B) \\ &= S(\sum_x p_x \rho_x) - \sum_x p_x S(\rho_x) = \chi(X_q) \end{aligned} \quad (۴۸)$$

در درس های گذشته دیدیم که آنتروپی فون نویمان الزاما تحت تاثیر نگاشت های کاملا مثبت رد نگهدار یا همان کانال های کوانتومی رفتار مشخصی ندارد، یعنی برای بعضی از کانال ها این آنتروپی افزایش می یابد مثل کانال واقطبش و برای بعضی دیگر مثل کانالی که همه حالت ها را به یک حالت خاص می نگارد، کاهش می یابد. حال نشان می دهیم که کمیت هولِه و همان چیزی است که در جستجوی آن بوده ایم. یعنی این کمیت همواره تحت اثر یک کانال کوانتومی کاهش می یابد.

■ قضیه: کمیت هولده و در اثر یک کانال کوانتومی کاهش می یابد. به عبارت دیگر فرض کنید که \mathcal{E} یک کانال کوانتومی است و

$$X_q = \{p_x, \rho_x\}, \quad X'_q = \{p_x, \mathcal{E}(\rho_x)\}.$$

در این صورت

$$\chi(X'_q) \leq \chi(X_q). \quad (49)$$

گاهی اوقات عبارت بالا را به صورت زیر نیز می نویسیم.

$$\chi(p_i, \mathcal{E}(\rho_i)) \leq \chi(p_i, \rho_i). \quad (50)$$

■ اثبات: بنابر قضیه قبلی می دانیم که

$$\chi(p_i, \rho_i) = S(\rho_{AB} || \rho_A \otimes \rho_B) \quad (51)$$

که در آن

$$\rho_{AB} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_x. \quad (52)$$

به همین ترتیب می دانیم که

$$\chi(p_i, \mathcal{E}(\rho_i)) = S(\rho'_{AB} || \rho_A \otimes \rho'_B) \quad (53)$$

که در آن

$$\rho'_{AB} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \mathcal{E}(\rho_x). \quad (54)$$

بنابراین اثبات قضیه وقتی کامل می شود که ثابت کنیم

$$S(\rho'_{AB} || \rho_A \otimes \rho'_B) \leq S(\rho_{AB} || \rho_A \otimes \rho_B). \quad (55)$$

اما این اثبات ساده است اگر به این نکته توجه کنیم که یک کانال کوانتومی را می توانیم به صورت ترکیبی از عمل یکانی روی سیستم و محیط و سپس رد جزیی روی محیط بنویسیم. بنابراین نخست حالت سه بخشی زیر را تعریف می کنیم که در آن بخش سوم نقش محیط را بازی می کند:

$$\rho_{ABC} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_x \otimes |0\rangle\langle 0| \quad (56)$$

و سپس می نویسیم

$$\rho'_{AB} \equiv \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \mathcal{E}(\rho_x) = \text{tr}_C \left(\sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes U [\rho_x \otimes |0\rangle\langle 0|] U^\dagger \right) =: \text{tr}_C \rho'_{ABC}. \quad (57)$$

حال به رابطه زیر توجه می کنیم که در آن تساوی اول به دلیل ناوردا بودن آنتروپی نسبی تحت تاثیر یک کانال یکانی $(I \otimes U)_{A,BC}$ است و تساوی دوم به خاطر مساوی بودن ناوردا بودن آنتروپی نسبی وقتی است که آنها را در یک حالت مثل $|0\rangle\langle 0|_C$ ضرب می کنیم.

$$S(\rho'_{ABC} || \rho_A \otimes \rho'_{BC}) = S(\rho_{ABC} || \rho_A \otimes \rho_{BC}) = S(\rho_{AB} || \rho_A \otimes \rho_B). \quad (58)$$

اما بنابر قضیه لیندبلد-اولمان می دانیم که

$$S(\rho'_{AB} || \rho_A \otimes \rho'_B) \leq S(\rho'_{ABC} || \rho_A \otimes \rho'_{BC}). \quad (59)$$

با ترکیب این دو رابطه آخر به رابطه (55) می رسیم که می خواستیم ثابت کنیم.

۲.۳ حد هوله وو

در این بخش به یک ویژگی مهم کمیت هوله و می پردازیم که به حد هوله و^۸ مشهور است. در این بخش می خواهیم این خصلت بنیادین را معرفی کنیم.

■ **قضیه: اطلاعات متقابل نمی تواند از کمیت هوله و بیشتر شود.** به عبارت دیگر همواره رابطه زیر برقرار است:

$$I(X : Y) \leq \chi(X_q). \quad (60)$$

Holevo Bound^۸

■ **اثبات:** این اثبات به زیبایی بر قضیه قبلی بنا می شود. نخست باید حالتی مرکب را چنان تعریف کنیم که آنتروپی نسبی بین بخش های آن کمیت هوله و χ را نتیجه دهد و سپس به یاد بیاوریم که اندازه گیری نیز یک کانال کوانتومی است و باعث کاهش کمیت هوله χ می شود. حالتی که تعریف می کنیم چنین است:

$$\rho_{ABC} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_x \otimes |0\rangle\langle 0|. \quad (61)$$

اندازه گیری باب نیز به صورت کانال زیر روی این حالت نشان داده می شود:

$$\mathcal{E}_{BC} : \rho_{ABC} \longrightarrow \sum_{x,y} p_x |x\rangle\langle x| \otimes \sqrt{E_y} \rho_x \sqrt{E_y} \otimes |y\rangle\langle y| =: \rho'_{ABC} \quad (62)$$

خواننده براحتمی می تواند خود را قانع کند که نگاشت بالا یک نگاشت کوانتومی مجاز است. بنابراین بنا بر قضیه پیشین داریم:

$$S(\rho'_{ABC} || \rho_A \otimes \rho'_{BC}) \leq S(\rho_{ABC} || \rho_A \otimes \rho_{BC}). \quad (63)$$

اما طرف راست چیزی نیست جز کمیت هوله χ . یک محاسبه ساده (که در تمرین ها آن را انجام می دهید) نیز نشان می دهد که طرف چپ برابر است با $I(X : Y)$. بنابراین قضیه ثابت می شود.

حال سوال مهمی که با آن روبرو هستیم این است که آیا واقعا می توانیم به حد هوله χ برسیم یا خیر؟ به اصطلاح می پرسیم که آیا حد هوله χ اشباع می شود یا خیر؟ پاسخی که به این سوال داده شده است این است که به صورت مجانبی می توان به حد هوله χ رسید. معنای این حرف این است که اگر آلیس رشته های n تایی از حالت های آنزامل خود را مثل $\sigma_{x_{i_1}} \otimes \sigma_{x_{i_2}} \cdots \otimes \sigma_{x_{i_n}}$ برای باب بفرستد و باب نیز مجاز باشد که روی همه این ها با هم اندازه گیری انجام دهد، آنگاه حد هوله χ را می توان اشباع کرد. به عبارت دقیق تر:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(X^n : Y^n)}{n} = \chi. \quad (64)$$

۳.۳ نزدیک شدن به حد هوله و واشباع آن

حال که معنای حد هوله و را آموخته ایم می توانیم با مثال های مشخص تر به بررسی آن بپردازیم. این مثال ها ساده و آموزنده هستند و با مطالعه آنها می توان مقدار اطلاعات متقابل بین آلیس و باب را محاسبه و با کمیت هوله و مقایسه کرد. نخست فرض می کنیم که آلیس دو حالت خالص به شکل زیر در اختیار دارد که بر هم عمود نیستند:

$$|\phi_0\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad |\phi_1\rangle = \cos \frac{\pi - \theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\pi - \theta}{2} |1\rangle. \quad (65)$$

وی قرار است هر کدام از این حالت ها را با احتمالات مساوی برای باب فرستد و باب می بایست با بهترین اندازه گیری که انجام می دهد بفهمد که آلیس کدام یک از حالت ها را برای او فرستاده است. یک اندازه گیری تصویری که مطابق شکل (۳.۳) نسبت به حالت های ارسال شده متقارن باشد در نظر می گیریم:

$$E_0 = |0\rangle\langle 0|, \quad E_1 = |1\rangle\langle 1|. \quad (66)$$

این فرایند دو متغیر تصادفی را تعریف می کند، یکی $X = \{0, 1\}$ که متناظر با حالتی است که آلیس برای باب می فرستد و دیگری $Y = \{0, 1\}$ که متناظر با نتیجه ای است که باب از اندازه گیری اش بدست می آورد. براحتی می توانیم احتمالات شرطی زیر را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} P(y=0|x=0) &= \langle \phi_0 | E_0 | \phi_0 \rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2}, & P(y=1|x=0) &= \langle \phi_0 | E_1 | \phi_0 \rangle = \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ P(y=0|x=1) &= \langle \phi_1 | E_0 | \phi_1 \rangle = \sin^2 \frac{\theta}{2}, & P(y=1|x=1) &= \langle \phi_1 | E_1 | \phi_1 \rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (67)$$

برای محاسبه اطلاعات متقابل نیاز داریم که احتمالات شرطی زیر را نیز محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} P(y=0, x=0) &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, & P(y=1, x=0) &= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ P(y=0, x=1) &= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, & P(y=1, x=1) &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (68)$$

می دانیم که آلیس حالت ها را با احتمال مساوی می فرستد. هم چنین می توانیم احتمال بدست آوردن نتایج مختلف توسط باب را نیز بدست آوریم. در نتیجه داریم:

$$P(x=0) = P(x=1) = \frac{1}{2}, \quad P(y=0) = P(y=1) = \frac{1}{2}. \quad (69)$$

حال همه چیز برای محاسبه اطلاعات متقابل آماده است و می توانیم این کمیت را حساب کنیم. نتیجه چنین است:

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \log_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \log_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (70)$$

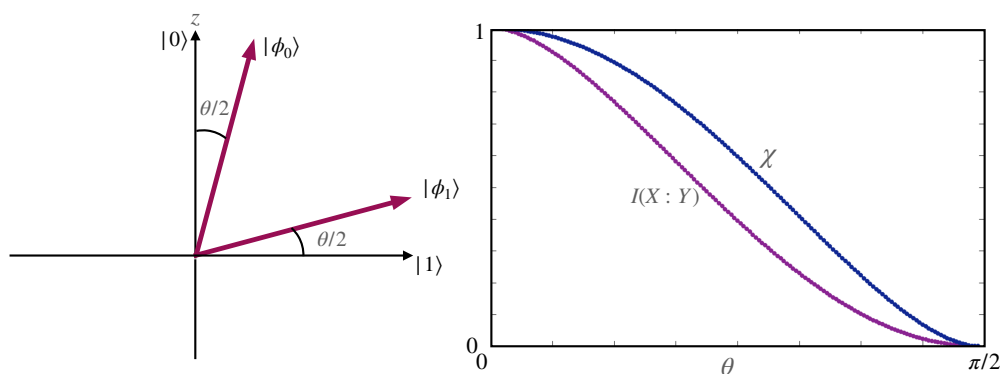
این تابع در شکل (۳.۳) با منحنی قرمز رنگ نشان داده شده است. هم چنین برای محاسبه کمیت هولده و می بایست ماتریس چگالی $\rho = \frac{1}{2}(|\phi_1\rangle\langle \phi_1| + |\phi_2\rangle\langle \phi_2|)$ را حساب کنیم:

$$\rho = \frac{1}{2}|\phi_0\rangle\langle \phi_0| + \frac{1}{2}|\phi_1\rangle\langle \phi_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sin \theta \\ \sin \theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

ویژه مقادیر این ماتریس براحتی حساب می شوند و از آنجا کمیت هولده و بدست می آید:

$$\chi = S(\rho) = -\frac{1 + \sin \theta}{2} \log_2 \frac{1 + \sin \theta}{2} - \frac{1 - \sin \theta}{2} \log_2 \frac{1 - \sin \theta}{2}. \quad (72)$$

این کمیت در شکل (۳.۳) با منحنی آبی رنگ نشان داده شده است. از این شکل می فهمیم که اطلاعات متقابل همواره کوچک تر از کمیت هولده و است. هم چنین در می یابیم که وقتی $\theta = 0$ است، یعنی وقتی که دو حالت ارسال شده بر هم عمود هستند، اطلاعات متقابل به بیشترین مقدار خود یعنی 1 می رسد و با کمیت هولده و برابر می شود که نتیجه ای است که انتظارش را نیز داشتیم. وقتی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ است، هم اطلاعات متقابل و هم کمیت هولده و هر دو برابر با صفر می شوند زیرا در این حد دو حالت ارسال شده هیچ تفاوتی با هم ندارند و طبیعتاً برای باب تشخیص آن دو از هم غیر ممکن است.



شکل ۵: مقایسه کمیت هولده و و اطلاعات متقابل برای وقتی که آلیس حالت های $|\phi_0\rangle$ و $|\phi_1\rangle$ را می فرستد و باب اندازه گیری تصویری $\{E_0, E_1\}$ انجام می دهد.

■ **تمرین:** آیا بهتر نیست که باب اندازه گیری زیر را انجام دهد:

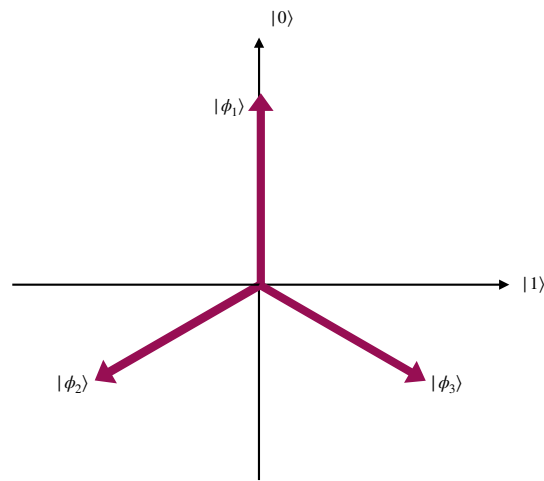
$$\{E_0 = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|, E_1 = I - E_0\}?$$

برای پاسخ به این سوال محاسباتی را که انجام دادیم تکرار کنید و اطلاعات متقابل بین آلیس و باب را محاسبه کنید و نتیجه را با اندازه گیری متقارن قبلی مقایسه کنید.

■ **مثال:** این مثال نیز با توجه به تقارنی که دارد و راحتی محاسبه انتخاب شده است. فرض کنید که آلیس یکی از سه حالت زیر را با احتمال

مساوی به باب می فرستد:

$$|\phi_1\rangle = |0\rangle, \quad |\phi_2\rangle = -\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \quad |\phi_3\rangle = -\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \quad (73)$$



شکل ۶: ...

این حالت ها خاصیت زیر را دارند

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ -\frac{1}{2}, & i \neq j \end{cases} \quad (74)$$

و ماتریس چگالی کل نیز برابر است با

$$\rho = \frac{1}{3}(|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| + |\phi_3\rangle\langle\phi_3|) = \frac{1}{2}I. \quad (75)$$

باب اندازه گیری زیر را انجام می دهد:

$$E_a = \frac{2}{3}(I - |\phi_a\rangle\langle\phi_a|), \quad a = 1, 2, 3. \quad (76)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که اندازه گیری باب واقعا یک $POVM$ است.

حال می توان همه احتمالات شرطی را حساب کرد. منظور ما از نماد $P(b|a)$ $P(y = b|x = a)$ است. این نمادگذاری را برای سادگی به کار برده ایم:

$$P(b|a) = \begin{cases} 0 & a = b \\ \frac{1}{2} & a \neq b \end{cases} \quad (77)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که اطلاعات متقابل آلیس و باب برابر است با:

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = 0.58496. \quad (78)$$

از طرفی کمیت هولده و برای این آنزامل برابر است با:

$$\chi = S(\rho) = S(I/2) = 1. \quad (79)$$

بنابراین اطلاعات متقابل آلیس و باب در مقایسه با آنزامل قبلی فاصله بیشتری تا کمیت هولده و دارد. دلیل اش خیلی ساده است زیرا در حالت قبلی این امکان وجود داشت که برای بعضی از زاویه های θ حالت های آلیس برهم عمود باشند ولی در این جا چنین امکانی وجود ندارد.

۴ آنتروپی فون نویمان به عنوان اندازه درهم تنیدگی

ما برای هر منبع مهم و با ارزشی هزینه می کنیم و آن را بدست می آوریم. الکتریسته را می خریم، برای اینترنت پول می دهیم، ب رای اشتراک تلفنی نیز هزینه می کنیم. هزینه ای که برای این منابع می کنیم نیز بستگی به ارزش آن ها دارد. خط اینترنتی که پهنای باند زیادی دارد ارزش بیشتر و قیمت بیشتری دارد. اکنون به مدد تکنولوژی کوانتومی می دانیم که درهم تنیدگی یک منبع مهم و با ارزش است. اگر دو نفر در دو آزمایشگاه یا دو ایستگاه دور از هم زوج های درهم تنیده داشته باشند می توانند کارهایی را انجام دهند که به کلی از عهده مخابرات کلاسیک بیرون باشد. بنابراین باید بتوانیم ارزش درهم تنیدگی را به شیوه ای معین و قابل قبول بسنجیم. باید بگوییم که مقدار درهم تنیدگی هر حالت چه مقدار ارزش

دارد. به طور مشخص تر بیابید به مثال زیر فکر کنیم.

آلیس در یک آزمایشگاه روی زمین و باب در یک آزمایشگاه روی یک ایستگاه فضایی مشغول به کارند و می خواهند کارهایی مثل فرابرد کوانتومی یا اشتراک کوانتومی کلید انجام دهند. برای این کار آنها احتیاج به زوج های درهم تنیده بل

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

دارند و شرکتی تخصصی قرار است این زوج ها را ساخته و برای آنها ارسال کند. برای هر زوج بل این شرکت یک سنت مطالبه می کند. شرکت دیگری نیز هست که زوج هایی را نه به صورت زوج بل بلکه به صورت

$$|\psi\rangle = \sqrt{0.85}|00\rangle + \sqrt{0.15}|11\rangle. \quad (80)$$

تولید می کند ولی هر کدام را به قیمت 0.3 سنت می فروشد. شرکت سومی هم وجود دارد که حالت هایی را از دو کیوتریت را به صورت

$$|\chi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle) \quad (81)$$

درست می کند و هر زوج را 0.5 سنت می فروشد. آلیس و باب احتیاج به میلیاردها زوج در هم تنیده دارند و اختلاف قیمت برای آنها بی اندازه مهم است. این دو می بایست از کدام یک از شرکت های فوق حالت های درهم تنیده بخرند؟

ممکن است به به صورت کیفی بتوانیم بگوییم درهم تنیدگی حالت $|\phi_+\rangle$ بیشتر است زیرا بیشترین فاصله کیفی را از یک حالت ضربی دارد. این پاسخ می تواند قانع کننده باشد ولی نمی گوید که درهم تنیدگی این حالت چقدر از درهم تنیدگی حالت دیگر بیشتر است؟ این پاسخ نمی گوید که برای خرید هر کدام از این حالت ها چه مقدار باید هزینه کنیم. هم چنین این پاسخ کیفی نمی تواند میزان درهم تنیدگی این حالت ها را با حالت (101) مقایسه کند.

برای پاسخ درست به این سوال به یک نکته مهم توجه می کنیم. تولید یک حالت در هم تنیده و نگاه داشتن این درهم تنیدگی در فاصله های دور از هم دشوار است، زیرا در هم تنیدگی بین دو ذره با برهم کنش آن دو ذره در یک آزمایشگاه تولید می شود و سپس در اثر دور کردن دو ذره از یکدیگر این درهم تنیدگی ممکن است از بین برود. دقیقاً به همین دلیل است یک حالت درهم تنیده برای آلیس و باب که در فاصله دور از هم قرار دارند. اصطلاحاً می گوییم در هم تنیدگی یک منبع⁹ با ارزش است. این فرض معقول را نیز می پذیریم که اعمال کوانتومی ای که این دو هر

⁹Resource

کدام در آزمایشگاه های خود به صورت جداگانه انجام می دهند سخت و هزینه بر نیست. به این دلیل به این اعمال، اعمال آزاد یا رایگان^{۱۰} می گوئیم. در مورد درهم تنیدگی اعمال رایگان، کلیه اعمال کوانتومی ای هستند که آیس و باب به صورت موضعی روی ذرات خود انجام می دهند که شامل اعمال یکانی و اندازه گیری است بعلاوه ارتباطات کلاسیکی که می توانند با هم برقرار کنند. این مجموعه اعمال اصطلاحاً $LOCC$ ^{۱۱} نامیده می شوند. حال با فهمیدن این که چه نوع اعمالی رایگان هستند می توانیم در باره ارزش ذاتی درهم تنیدگی حالت های کوانتومی قضاوت کنیم. مثل هر چیز دیگری می بایست یک واحد برای درهم تنیدگی انتخاب کنیم. بنابراین میزان در هم تنیدگی یک حالت بل مثل $|\phi^+\rangle$ را برابر با یک می گیریم و آن را یک $Ebit$ می خوانیم. حال اگر بین دو آزمایشگاه تعداد 100 تا زوج بل وجود داشته باشد منطقی است که بگوئیم به اندازه 100 واحد درهم تنیدگی بین این دو آزمایشگاه به اشتراک گذاشته شده است زیرا این دو آزمایشگاه با این زوج ها می توانند روی 100 تا کیوبیت اعمال غیرکلاسیکی مثل فرابرد کوانتومی انجام دهند. حال اگر بین این دو آزمایشگاه 100 تا حالت از نوع

$$|\phi\rangle = \sqrt{0.85}|00\rangle + \sqrt{0.15}|11\rangle$$

وجود داشته باشد، آنگاه منطقی است که ببینیم این دو آزمایشگاه با انجام اعمال رایگان روی این حالت ها چه تعداد زوج بل می توانند درست کنند. هرگاه بتوانند تعداد 60 تا زوج در هم تنیده درست کنند می توانیم بگوئیم که ارزش در هم تنیدگی هر کدام از حالت هایشان به اندازه 0.6 واحد است. در واقع برخورد ما با اندازه درهم تنیدگی درست شبیه به مبادله پول و سرمایه است. از آنجا که همه اعمال رایگانی که ما انجام می دهیم نتایج احتمالاتی دارند این تبدیل حالت و مبادله ارزش درهم تنیدگی می بایست در حد مجانبی تعریف شود. یعنی اینکه اگر بین دو آزمایشگاه تعداد N تا حالت درهم تنیده $|\phi\rangle$ به اشتراک گذاشته شده باشد و بتوان از این حالت ها تعداد k تا حالت بل درست کرد آنگاه می گوئیم

$$N\mathcal{E}(|\phi\rangle) = k\mathcal{E}(|\phi_+\rangle) = k \times 1 = k, \quad (82)$$

و یا

$$\mathcal{E}(|\phi\rangle) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{N}. \quad (83)$$

حال می توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم.

■ **قضیه: اندازه درهم تنیدگی حالت های خالص:** اندازه درهم تنیدگی یک حالت خالص به صورت $|\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^d \psi_{i,j}|i,j\rangle$ برابر

است با

^{۱۰}Free Operation

^{۱۱}Local Operation and Classical Communication

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle_{AB}) := S(\rho_A) = S(\rho_B), \quad (۸۴)$$

که در آن S آنتروپی فون نویمان و ρ_A و ρ_B ماتریس های چگالی کاهش یافته هستند. بدیهی است که این دو ماتریس چگالی با هم مساوی نیستند ولی هر چه که باشند آنتروپی فون نویمان آنها باهم برابر است. به این ترتیب مقدار درهم تنیدگی سه حالتی که در ابتدای این بخش به آنها اشاره کردیم به صورت زیر است:

$$\mathcal{E}(|\phi_+\rangle) = 1, \quad \mathcal{E}(|\psi\rangle) = 0.6, \quad \mathcal{E}(|\chi\rangle) = \log_2 3 = 1.58. \quad (۸۵)$$

دقت کنید که این نتیجه برای هر بعدی برقرار است یعنی اگر بین دو آزمایشگاه تعداد 100 تا حالت $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$ به اشتراک گذاشته باشد آنها می توانند از این حالت ها تعداد تقریبی 158 تا حالت بل درست کنند.

اثبات: ایده اصلی اثبات را با یک مثال ساده نشان می دهیم. نکته مهم این است که کلی ترین اندازه گیری ها یا اعمال کوانتومی را برای آلیس و باب برای ذراتی که در اختیار دارند در نظر می گیریم. در واقع این روش همانطور که نشان خواهیم داد متکی بر مفهوم رشته های نمونه است که در واقع از ابتدا تا کنون تم هماهنگ کننده همه نتایج مربوط به آنتروپی شانون و آنتروپی فون نویمان بوده است. برای درک این موضوع فرض کنید که آلیس و باب تعداد خیلی زیادی مثلا N تا از حالت $|\psi\rangle_{AB} = \sqrt{1-p}|00\rangle + \sqrt{p}|11\rangle$ را در اختیار دارند. در این جا از تجزیه اشمیت برای حالت اولیه دو کیوبیتی استفاده کرده ایم. این تعداد رشته را N بگیریم. بنابراین حالتی که در دست آنهاست این است:

$$|\Psi(N)\rangle = |\psi\rangle_{AB}^{\otimes N} = (\sqrt{1-p}|00\rangle + \sqrt{p}|11\rangle)^{\otimes N} \quad (۸۶)$$

برای سادگی فرض کنید که $N = 3$ باشد. در این صورت بسط حالت بالا به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} |\Psi(3)\rangle_{a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3} &= \sqrt{1-p}^3 |00, 00, 00\rangle + \sqrt{1-p}^2 \sqrt{p} (|00, 00, 11\rangle + |00, 11, 00\rangle + |11, 00, 00\rangle) \\ &+ \sqrt{1-p} \sqrt{p}^2 (|11, 11, 00\rangle + |11, 00, 11\rangle + |00, 11, 11\rangle) + \sqrt{p}^3 |11, 11, 11\rangle. \end{aligned} \quad (۸۷)$$

اندیس های این حالت نشان می دهد که کدام کیوبیت ها در دست آلیس و کدام در دست باب هستند. می توان این حالت را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$|\Psi(3)\rangle_{a_1 a_2 a_3; b_1 b_2 b_3} = \sqrt{1-p}^3 |000, 000\rangle + \sqrt{1-p}^2 \sqrt{p} (|001, 001\rangle + |010, 010\rangle + |100, 100\rangle)$$

$$+ \sqrt{1-p}\sqrt{p^2} (|110, 110\rangle + |101, 101\rangle + |011, 011\rangle) + \sqrt{p^3}|111, 111\rangle. \quad (88)$$

حال آلیس می تواند روی سه کیوبیتی که در دست دارد اندازه گیری جمعی انجام دهد و به اصطلاح اسپین کل آنها را اندازه بگیرد. در این صورت آلیس چهار نتیجه متفاوت هرکدام با یک احتمال بدست می آورد و حالت دست او و هم چنین دست باب به یکی از حالت های زیر تصویر می شود:

$$\begin{aligned} |\Psi_0(3)\rangle &= |000, 000\rangle & Pr(0) &= (1-p)^3, \\ |\Psi_1(3)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|001, 001\rangle + |010, 010\rangle + |100, 100\rangle) & Pr(1) &= (1-p)^2 p \\ |\Psi_2(3)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|110, 110\rangle + |101, 101\rangle + |011, 011\rangle) & Pr(2) &= (1-p) p^2 \\ |\Psi_3(3)\rangle &= |111, 111\rangle & Pr(3) &= p^3. \end{aligned} \quad (89)$$

نکته مهم این است که حالت دست آلیس و باب همواره به یک حالت که ترکیبی یکنواخت با ضرایب یکسان از حالت های مختلف است تصویر می شود. این نکته چنانکه در آینده خواهیم دید اهمیت دارد. حال که خواننده با حالت $N=3$ آشنا شده است می تواند حالت کلی را برای خود تجزیه و تحلیل کند و آن را براحتی بفهمد. می توانیم بگوییم که وقتی در حالت کلی آلیس روی N تا اسپین خود این اندازه گیری جمعی را انجام می دهد حالت در دست او و باب به یکی از حالت های زیر تصویر می شود:

$$|\Psi_k(N)\rangle_{a_1 a_2 \dots a_N; b_1 b_2 \dots b_N} = \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{k}}} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N=0,1}^1 |s_1 s_2 \dots s_N; s_1 s_2 \dots s_N\rangle \quad (90)$$

که در آن جمع \sum' روی تمام رشته هایی است که دارای k تا 1 و $N-k$ تا 0 هستند. دقت کنید که تعداد حالت های $|s_1 s_2 \dots s_N; s_1 s_2 \dots s_N\rangle$ برابر است با $\binom{N}{k}$. احتمال اینکه حالت اولیه به یک حالت $|\Psi_k(N)\rangle$ تصویر شود برابر است با

$$Pr(k) = \binom{N}{k} \times (1-p)^k p^{N-k}$$

. حال آن چه را که در باره رشته های نمونه دیده بودیم به یاد می آوریم و آن اینکه محتمل ترین رشته ها آنهایی هستند که تعداد 1 های آنها برابر است با $N(1-p)$ و تعداد 0 های آنها برابر است با Np . از خود می پرسیم که احتمال تصویر شدن حالت اولیه به حالتی که شامل رشته های نوعی باشد چقدر است؟ یعنی احتمال تصویر شدن حالت اولیه به حالتی نزدیک به حالت $|\Psi_{Np}(N)\rangle$ ؟ این احتمال تقریباً برابر است با:

$$Pr(k = Np) = \binom{N}{Np} \times (1-p)^{Np} p^{N(1-p)} \quad (91)$$

اما می دانیم که در حد N های بزرگ این احتمال برابر خواهد بود با

$$Pr(k = Np) \approx 2^{NH(p)} \times 2^{-NH(p)} \approx 1 \quad (92)$$

که در آن

$$H(p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p) = S(\rho_A). \quad (93)$$

معنای این حرف این است که در این اندازه گیری تقریباً به طور قطع حالت آلیس و باب به حالت $|\Psi_{Np}(N)\rangle$ تصویر می شود و این حالت چیزی نیست جز ترکیب یکنواختی از رشته های نوعی که تعداد آن ها نه 2^N تا بلکه $2^{NS(\rho)}$ تا است. حال می توانیم با یک عملگر یکانی این حالت را به یک حالت تبدیل کنیم که نشان دهنده ضرب تانسوری تعداد $N(S(\rho))$ تا حالت بل باشد. برای فهمیدن بهتر این قضیه به مثال زیر توجه می کنیم: فرض کنید که $N = 4$ و $p = \frac{1}{4}$ است. در این صورت حالت $|\Psi_1(4)\rangle$ برابر است با:

$$|\Psi_1(4)\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} (|1000, 1000\rangle + |0100, 0100\rangle + |0010, 0010\rangle + |0001, 0001\rangle)_{a_1 a_2 a_3 a_4; b_1 b_2 b_3 b_4}. \quad (94)$$

آلیس و باب می توانند هر کدام یک عملگر یکانی روی حالت خود اعمال کنند که تبدیل زیر را انجام دهد:

$$\begin{aligned} |1000\rangle &\longrightarrow |00\rangle \otimes |00\rangle, \\ |0100\rangle &\longrightarrow |01\rangle \otimes |00\rangle, \\ |0010\rangle &\longrightarrow |10\rangle \otimes |00\rangle, \\ |0001\rangle &\longrightarrow |11\rangle \otimes |00\rangle. \end{aligned} \quad (95)$$

در این صورت حالت بالا تبدیل می شود به

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} (|00, 00\rangle + |01, 01\rangle + |10, 10\rangle + |11, 11\rangle)_{a_1 a_2; b_1 b_2} \otimes |00\rangle_{a_3 a_4} \otimes |00\rangle_{b_3 b_4}. \quad (96)$$

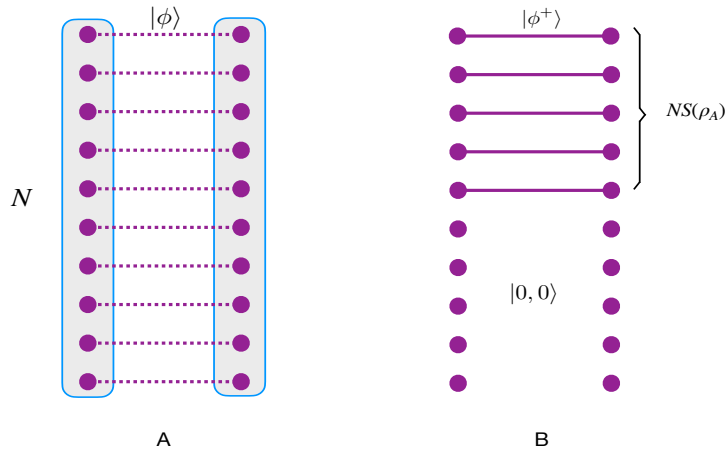
سپس آنها می توانند کیوبیت های 3, 4 را برای کار دیگری ذخیره کنند و به کیوبیت های 1, 2 توجه کنند. حالت این کیوبیت ها برابر است با

$$|\chi\rangle_{a_1 b_1; a_2 b_2} = \frac{1}{\sqrt{4}} (|00, 00\rangle + |00, 11\rangle + |11, 00\rangle + |11, 11\rangle)_{a_1 b_1; a_2 b_2}. \quad (97)$$

اما حالت آخر چیزی نیست جز

$$|\chi\rangle_{a_1 b_1; a_2 b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)_{a_1 b_1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)_{a_2 b_2}, \quad (98)$$

یعنی دو تا حالت کامل بل که در دست آلیس و باب باقی مانده است. حال با دیدن این مثال می توانیم به حالت کلی باز گردیم و خودمان را قانع کنیم که آلیس و باب می توانند در حد مجانبی یعنی وقتی که N خیلی زیاد است، از تعداد N تا حالت $|\phi\rangle = \sqrt{1-p}|00\rangle + \sqrt{p}|11\rangle$ که در دست دارند، تعداد $NS(\rho)$ تا حالت بل درست کنند.



شکل ۷: آلیس و باب با اعمال موضعی کوانتومی و ارتباطات کلاسیک که رایگان شمرده می شوند، می توانند N تا حالت $|\phi\rangle$ را به $NS(\rho)$ حالت درهم تنیده بل تبدیل کنند. بنابراین ارزش درهم تنیدگی هر حالت ϕ برابر است با $S(\rho)$ ای-بیت.

■ تمرین: حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sqrt{1-p}|00\rangle + \sqrt{p}|11\rangle, \quad p \leq 0.5. \quad (99)$$

آلیس یک اندازه گیری غیر متعامد با عملگرهای زیر روی کیوبیت خودش انجام می دهد:

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda p} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda(1-p)} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda p} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda(1-p)} \end{pmatrix}. \quad (100)$$

با این اندازه گیری اگر آلیس نتیجه A را بدست بیاورد حالت $|\psi_{AB}\rangle$ به یک حالت بل تبدیل می شود. این احتمال را بدست بیاورید. احتمال را بیشینه کنید و بگویید که اگر آلیس تعداد 1000 تا از این حالت ها داشته باشد تقریبا چند تا حالت بل می تواند درست کند. با روشی که به کار برده اید چه ارزش درهم تنیدگی ای به حالت $|\psi\rangle_{AB}$ نسبت می دهید؟

۱.۴ درهم تنیدگی حالت های آمیخته

حال فرض کنید که شرکت تخصصی ای که می خواهد به آلیس و باب حالت های درهم تنیده بفروشد، حالت هایی به صورت زیر پیشنهاد می کند:

$$\rho = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-|) \quad (1.1)$$

که در آن

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (1.2)$$

حالت های درهم تنیده کامل هستند. به عبارت دیگر هر حالتی که این شرکت ارسال می کند با احتمال پنجاه درصد یکی از حالت های درهم تنیده ماکزیمال است. آلیس و باب چه مبلغی می بایست برای خرید این حالت ها پرداخت کنند؟ پاسخ این سوال این است که هیچ مبلغی نمی بایست پرداخت کنند. این حالت ها در واقع در هم تنیده نیستند. دلیل اش هم این است که این حالت ها را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \quad (1.3)$$

که ترکیبی از دو حالت کاملا ضربی و جدا از هم است. ممکن است سوال کنیم چرا می بایست این تجزیه را مبنای قضاوت خود قرار دهیم و نه تجزیه قبلی را که حالت ρ را به صورت ترکیب مساوی از حالت های کاملا درهم تنیده نشان می داد. پاسخ اش این است که حالت های $|\phi^+\rangle$ و $|\phi^-\rangle$ اگر چه برهم عمودند، اما با اندازه گیری های موضعی از هم قابل تمیز نیستند. بنابراین آلیس و باب نمی توانند با انجام اندازه گیری های موضعی (یا اعمال رایگان) بفهمند که کدام یک از حالت های درهم تنیده در اختیار آنها قرار نهاده شده است. اما حالت های $|00\rangle$ و $|11\rangle$ به صورت موضعی از هم قابل تمیزند. بنابراین حالت ρ واقعا هیچ نوع درهم تنیدگی ندارد و اگر درهم تنیدگی اش را با $S(\rho_A)$ بسنجیم دچار اشتباه می شویم. با توجه به مثالی که ذکر کردیم یک راه برای سنجش درهم تنیدگی حالت های درهم تنیده آمیخته این است که آنها را به صورت

$$\rho = \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

تجزیه کنیم و متوسط میزان درهم تنیدگی را در هر تجزیه حساب کنیم و سپس کمترین مقدار این متوسط را به عنوان میزان درهم تنیدگی بپذیریم:

$$\mathcal{E}(\rho) := \text{Min}_{\{p_i, \phi_i\}} \sum_i p_i \mathcal{E}(|\phi_i\rangle). \quad (1.4)$$

این تعریف یک تعریف معقول و منطقی است ولی تنها در ابعاد کوچک (دو کیوبیت) می توان آن را تبدیل به یک رابطه ساده و فشرده کرد.

۵ اصل عدم قطعیت آنتروپیک

اصل عدم قطعیت به شکلی که تا کنون آموخته ایم بیان می کند که عدم یقینی که در اندازه گیری دو مشاهده پذیر مثل X و Y در یک حالت کوانتومی مثل $|\psi\rangle$ پیدا می کنیم، در رابطه زیر صدق می کند.

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [X, Y] | \psi \rangle|, \quad (105)$$

که در آن عدم یقین نسبت به اندازه گیری یک مشاهده پذیر به صورت زیر تعریف شده است:

$$(\Delta X)^2 = \langle \psi | X^2 | \psi \rangle - \langle \psi | X | \psi \rangle^2. \quad (106)$$

اما این تعریف از دو جهت دارای نقص است. نخست اینکه طرف راست تنها به مشاهده پذیرها بستگی ندارد بلکه به حالت $|\psi\rangle$ نیز بستگی دارد و به همین دلیل این عبارت نشان دهنده ناسازگاری ذاتی دو مشاهده پذیر X و Y نیست. هم چنین می توان با نگاه کردن به شکل (۸) دریافت که این تعریف، چندان نشان دهنده عدم یقین ما (به معنای پیش بینی ناپذیری) از مقادیری که در یک اندازه گیری حاصل می شوند نیست. در شکل سمت چپ، توزیع احتمال کاملاً پراکنده است و اگر از آزمایشگر بخواهیم که مقداری را برای مشاهده پذیر X پیش بینی کند اغلب اوقات اشتباه می کند و حال آنکه در توزیع سمت راست به طور متوسط در نیمی از اندازه گیری ها پیش بینی او درست از آب در می آید. این درست خلاف آن چیزی است که با واریانس نشان داده می شود. بنابراین به نظر می رسد که تعریف عدم یقین بر اساس واریانس تعریفی نیست که به درستی نشان دهنده عدم یقین در اندازه گیری یک مشاهده پذیر باشد. درست تر این است که عدم یقین را بر اساس انتروپی توزیع مقادیر مشاهده پذیر تعریف کنیم. در سالهای اخیر با توجه به این تعریف جدید، اصل عدم یقین هایزنبرگ نیز به شکل جدیدی صورت بندی می شود که به آن صورت بندی مبتنی بر انتروپی^{۱۲} می گوئیم. این صورت بندی چنین است:

$$H(X) + H(Y) \geq \log\left(\frac{1}{c}\right) + H(\rho), \quad (107)$$

^{۱۲} Entropic Uncertainty Principle

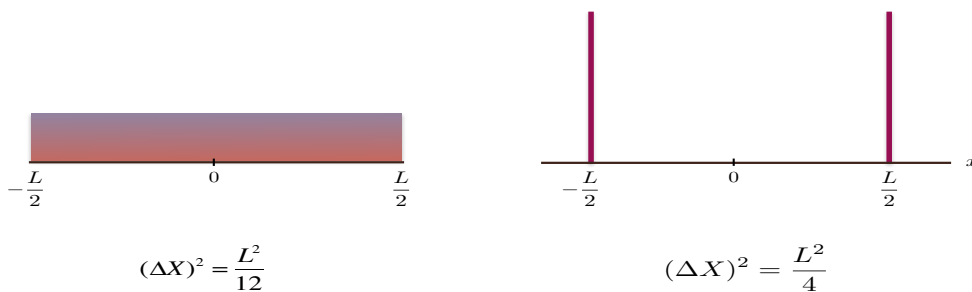
که در آن ρ حالتی است که روی آن اندازه گیری می کنیم و c به صورت زیر تعریف می شود.

$$c = \max_{x,y} |\langle x|y \rangle|^2. \quad (108)$$

برای وقتی که روی حالت های خالص اندازه گیری می کنیم رابطه بالا به صورت

$$H(X) + H(Y) \geq \log\left(\frac{1}{c}\right), \quad (109)$$

در می آید که کاملاً مستقل از حالت ورودی و تنها وابسته به نوع دو مشاهده پذیر است. اگر هم رابطه (۱۲۷) به حالت اولیه بستگی دارد، این بستگی به صورت معناداری به عدم یقینی که در خود آن حالت وجود دارد، یعنی به میزان آمیختگی آن، مرتبط است.



شکل ۸: در توزیع احتمال سمت چپ، داده ها کاملاً پراکنده اند و یقین ما در باره اینکه مقدار x چقدر است بسیار کمتر است. اما در شکل سمت راست داده ها پراکندگی خیلی کمتری دارند و یقین ما در باره مقدار x بیشتر است. با این وجود واریانس توزیع سمت چپ کمتر از واریانس توزیع سمت راست است!

برای اثبات اصل عدم یقین آنتروپیک، نخست دو نگاهت کاملاً مثبت زیر را معرفی می کنیم. این نگاهت ها در واقع عناصر غیر قطری ماتریس چگالی را در پایه های X و Y پاک می کنند و آنها را برابر با صفر قرار می دهند. آنچه که روی قطر این ماتریس ها باقی می ماند همانا احتمالات اندازه گیری در هر کدام از این پایه هاست:

$$M_X : \rho \longrightarrow \sum_x |x\rangle \rho_{xx} \langle x| =: \rho_x$$

$$M_Y : \rho \longrightarrow \sum_y |y\rangle \rho_{yy} \langle y| =: \rho_y. \quad (110)$$

بنابراین واضح است که انتروپی شانون مربوط به هر اندازه گیری چیزی جز آنتروپی فون نویمانِ ماتریس های چگالی فوق نیست، یعنی

$$H(X) = S(\rho_X) \quad H(Y) = S(\rho_Y). \quad (111)$$

از طرفی با توجه به این که ماتریس ρ_x قطری است به آسانی معلوم می شود که:

$$-Tr(\rho \log \rho_X) = -Tr(\rho_X \log \rho_X) = H(X). \quad (112)$$

حال از این تساوی و تعریف آنتروپی نسبی استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$S(\rho||\rho_X) = Tr(\rho \log \rho - \rho \log \rho_X) = -S(\rho) - Tr(\rho_X \log \rho_X) = -S(\rho) + H(X). \quad (113)$$

بنابراین تا اینجا ثابت کردیم که رابطه زیر برقرار است.

$$H(X) = S(\rho||\rho_X) + S(\rho) \quad (114)$$

حال نداشت $M_Y : \rho \longrightarrow \rho_Y$ را در نظر می گیریم و توجه می کنیم که تحت این نگاشت آنتروپی نسبی بین دو حالت حتما کاهش پیدا می کند. بنابراین:

$$S(\rho||\rho_X) \geq S(\rho_Y||M_Y(\rho_X)). \quad (115)$$

می توانیم $M_Y(\rho_X)$ را به طور صریح حساب کنیم:

$$\begin{aligned} M_Y(\rho_X) &= \sum_y |y\rangle \langle y| \left[\sum_x |x\rangle \rho_{xx} \langle x| \right] |y\rangle \langle y| \\ &= \sum_y |y\rangle \left[\sum_x |\langle y|x\rangle|^2 \rho_{xx} \right] \langle y|. \end{aligned} \quad (116)$$

و با توجه به قطری بودن ماتریس فوق

$$\log M_Y(\rho_X) = \sum_y |y\rangle \left[\log \left(\sum_x |\langle y|x\rangle|^2 \rho_{xx} \right) \right] \langle y|. \quad (117)$$

این ماتریس در پایه Y قطری است، بنابراین خواهیم داشت:

$$Tr \rho_Y \log M_Y(\rho_X) = \sum_y \rho_{yy} \log \left(\sum_x \langle y|x\rangle \rho_{xx} \langle x|y\rangle \right) \quad (118)$$

اما با توجه به صعودی بودن تابع لگاریتم می دانیم که:

$$\log\left(\sum_x |\langle y|x \rangle|^2 \rho_{xx}\right) \leq \log(\text{Max}_{x,y} |\langle y|x \rangle|^2) \sum_x \rho_{xx} = \log(c) \quad (119)$$

که در آن

$$c = \text{Max}_{x,y} |\langle y|x \rangle|^2. \quad (120)$$

بنابراین یافتیم که

$$\text{Tr} \rho_Y \log M_Y(\rho_X) \leq \sum_y \rho_{yy} \log(c) = \log(c) \quad (121)$$

و یا

$$-\text{Tr} \rho_Y \log M_Y(\rho_X) \geq \log\left(\frac{1}{c}\right). \quad (122)$$

اگر به تعریف $S(\rho_Y || M_Y(\rho_X))$ توجه کنیم و از رابطه بالا استفاده کنیم می بینیم که:

$$S(\rho_Y || M_Y(\rho_X)) \equiv \text{Tr}(\rho_Y \log \rho_Y - \rho_Y \log M_Y \rho_X) \geq -H(Y) + \log\left(\frac{1}{c}\right). \quad (123)$$

بنابراین با ترکیب این رابطه و رابطه (۱۳۵) و (۱۳۴)

بدست می آوریم

$$H(X) \geq -H(Y) + S(\rho) + \log\left(\frac{1}{c}\right) \quad (124)$$

و یا

$$H(X) + H(Y) \geq S(\rho) + \log\left(\frac{1}{c}\right). \quad (125)$$

در حالت خاصی که اندازه گیری روی یک حالت خالص انجام می شود، رابه بالا کاملا از حالت اولیه مستقل می شود و به شکل

$$H(X) + H(Y) \geq \log\left(\frac{1}{c}\right) \quad (126)$$

در می آید. در حالت خاص دیگری که اندازه گیری دو عملگر با پایه های کاملاً متوازن^{۱۳} انجام می شود، یعنی پایه هایی که دارای خاصیت زیر هستند:

$$|\langle x|y\rangle|^2 = \frac{1}{d} \quad \forall \quad x, y, \quad (127)$$

رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$H(X) + H(Y) \geq S(\rho) + \log d. \quad (128)$$

۶ مسئله ها

■ آلیس آزمایلی از حالت ها را با احتمالات داده شده در زیر برای باب می فرستد:

$$\mathcal{E} = \{|0\rangle\langle 0|(\frac{1}{2}), |+\rangle\langle +|(\frac{1}{2})\}. \quad (129)$$

باب یک اندازه گیری متعامد و دو حالت با تصویرگرهای $P_+ = |n, +\rangle\langle n, +|$ و $P_- = |n, -\rangle\langle n, -|$ روی حالت های دریافتی انجام می دهد. میزان اطلاعات قابل حصول برای باب را به عنوان تابعی از جهت n بدست آورید. به ازای کدام جهت این اطلاعات بیشینه می شود. این اطلاعات را با کمیت هولده و مقایسه کنید.؟

■ حالت زیر را در که بخش مربوط به کمیت هولده و ساختیم در نظر بگیرید. $\{E_{ij}\}$ اندازه گیری باب را مشخص می کنند.

$$\rho'_{ABC} = \sum_{x,y} p_x |x\rangle\langle x| \otimes \sqrt{E_y} \rho_x \sqrt{E_y} \otimes |y\rangle\langle y|. \quad (130)$$

نشان دهید که آنتروپی نسبی $S(\rho'_{ABC} || \rho_A \otimes \rho'_{BC})$ همان اطلاعات متقابل آلیس و باب است.

^{۱۳}Mutually Unbiased Bases (MUB)

■ ترکیب محدب زیر از آنتروپی های فون - نویمان را در نظر بگیرید:

$$S_p = S[p\sigma + (1-p)\rho] - pS[\sigma] - (1-p)S[\rho]. \quad (131)$$

مشتق این عبارت را در $p = 1$ و $p = 0$ محاسبه کنید و نسبت آنها را با آنتروپی های نسبی $S(\sigma|\rho)$ و $S(\rho|\sigma)$ مشخص کنید.

■ تحت چه شرایطی هر یک از تساوی های زیر برقرار خواهند بود:

$$\begin{aligned} I(A : B) &= 0 \\ I(A : B) &= 2 \operatorname{Inf}(S(A), S(B)). \end{aligned} \quad (132)$$

■ آنتروپی های $S(A)$, $S(B)$, $S(A, B)$

را برای حالت ورنر

$$\rho_W = \frac{p}{4} I \otimes I + (1-p) |\psi^-\rangle \langle \psi^-| \quad (133)$$

حساب کنید و تعیین کنید که به ازای کدام مقدار از پارامتر p هر کدام از تساوی های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} S(A, B) &= S(A) + S(B), \\ S(A, B) &= |S(A) - S(B)|. \end{aligned} \quad (134)$$

■ یک اثبات کلی برای قضیه عدم تکثیر: می خواهیم نشان دهیم که هیچ کانال کوانتومی وجود ندارد که کار زیر را انجام دهد:

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho \otimes \rho. \quad (135)$$

نشان دهید که

$$D(\rho, \sigma) \leq D(\rho \otimes \rho, \sigma \otimes \sigma). \quad (136)$$

با توجه به این رابطه و این که هیچ کانال کوانتومی نمی تواند فاصله بین حالت ها را زیاد کند نشان دهید که کانال \mathcal{E} نمی تواند وجود داشته باشد.

■ آنتروپی فانو برای یک حالت به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(\rho) = -\log[\text{Tr}(\rho^2)]. \quad (137)$$

الف- مقدار ماکزیمم و می نیمم آنتروپی فانو را برای یک حالت دلخواه حساب کنید و با مقادیر مشابه برای آنتروپی فون نویمان مقایسه کنید.

ب- نشان دهید که برای همه حالت ها

$$S(\rho) \geq F(\rho). \quad (138)$$

■ از روش ضرایب نامعین لاگرانژ استفاده کنید و مقدار می نیمم آنتروپی نسبی $S(\sigma||\rho)$ را پیدا کنید.